105 - Groupe des permutations d'un ensemble

On va d'abord étudier les éléments de Sn : leur forme, la façon dont ils s'écrivent etc… On introduira le concept de signature, qui nous permettra de différencier deux catégories de permutations. On verra quelles familles d'éléments génèrent Sn et An.
Dans une seconde partie, on se concentrera sur la structure de An : ses sous groupes, lesquels sont simples, le centre, le groupe dérivé etc. On verra aussi les automorphismes de Sn.
Ensuite on verra le lien entre les actions de groupe Sn ; des fois c'est Sn qui agira, mais des fois non, par contre le groupe agissant pourra parfois être identifié à un sous groupe de Sn.

I) Eléments et générateurs de Sn

Définition de Sn

Cardinal : n! *(voir Sn comme une bijection)*

1) Cycles et générateurs [Del 46]

Déf : r-cycle, support

Prop : 2 cycles à supports disjoints commutent *(un cycle laisse invariant un elt qui n'est pas dans son support)*

Prop : toute permutation se décompose de façon unique en un produit de cycles à support disjoint *(algorithme : s une permutation. On cherche l'image de 1, puis l'image de cette image, etc, jusqu'à retomber sur 1, ça donne un 1^{er} cycle. Ensuite on prend le plus petit entier qui n'est pas apparu et on recommence. Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'entier. On obtient des cycles à support disjoints. Unicité ? Un cycle contenant un entier doit contenir toutes ses images successives par s, si il ne contient pas la k-ème image, on a un problème lorsqu'on élève s à la puissance k. Par le même argument, l'ordre des elts ds un cycle est uniquement déterminé)*

Prop : tout r-cycle se décompose en un produit de transpo. Sn est donc engendré par les transpo *((i,j,k,l)=(i,j)((j,k)(k,l))*

Prop : conjugaison des cycles *(le calculer)*

Prop : plusieurs systèmes de générateurs de Sn : (1,i), (i,i+1), (1,..,n) et (1,2) *((i,j)=(1,i)(1,j)(1,i) ; pareil pour les autres)*

Prop : si p est premier, alors Sp est engendré par un p-cycle et une transpo (pour Galois) [Goz 177] *(on suppose que la transpo t=(1,2) et le cycle c=(1,a,b,c,…). Il existe k tq c^k(1)=2. On remplace c par c^k. c^k est un p-cycle (c'est là qu'intervient l'hup p premier) et c^k=(1,2x_3,x_4,….). Il existe u dans Sp tq u(1)=1, u(2)=2, u(3)=x_3, u(4)=x_4… Quitte à remplacer c par u^-1*c*u, on a c=(1,2,3,4…,p). On se retrouve donc avec (1,2) et (1,2,…,p) qui génère Sp entier. Hum pas clair, on a eu besoin d'un u inconnu)*

2) Signature et groupe alterné [Del 48]

Déf : signature : soit k=o+p où o est le nombre de cycles dans la decomp de la permutation, et p le nb de points fixes. Alors la signature est (-1)^(n-k).

Prop : mph de groupe (c'est d'ailleurs le seul) *(pénible)*

Ex : transpo : -1 ; r-cycle

Déf : groupe alterné

Rq : An distingué, cardinal

Prop : An est engendré par les 3 cycles (\ge 3)

Prop : An est engendré par les (1,2,i)

Une formule où la signature intervient : déterminant.

II) Sous groupes et automorphismes de Sn

1) Sous groupes de Sn

n=2 : rien à dire

n=3 : étude détaillée
Z(Sn)={Id} *(élémentaire : on montre que si s commute avec (a,b) alors s=Id ou un autre cas qui aboutit à une contradiction si on ajoute un c)*

n=4 : étude détaillée

n≥5 :

Th : A5 est simple [Perrin 28] *(cas n=5 : sit H un sg distingué de A5. Dans A5 il y a des éléments d'ordre 3, 3 et 5. Les 3-cycles sont conjugués dasn A5 et les éléments d'ordre 2, donc si H en contient un il les contient tous. Si H contient un élément d'ordre 5, il contient le 5 Sylow engendré par cet élément, donc tous les 5 Sylow car ils sont conjugués, donc tous les éléments d'ordre 5. On montre alors que H ne peut pas contenir que des éléments d'ordre 2 ou 3 ou 5 pour des raisons de cardinaux, donc il en contient au moins 2 type, donc son cadinal est >35 donc H=A5)*

Cor : An est simple *(Pour n>5 : H sg dist de An, s dans H no ntrivial. On veut fabriquer à partir de s un élément de H qui agit sur un ens à 5 éléments. On prend un élément u particulier de An, et on pose r=[u,s] (commutateur) qui va fixer n-5 éléments, et agit sur un ens F à 5 éléments. A(F) est isomph à A5 et se plonge dans An. Soit H_0 l'ens des permutations de A(F) qui se plongent dans H. H_0 sistingué dans A(F)=A5 donc =A5. Soit t un 3-cycle de A(F)=H0 inclus dans H, H contient un 3 cycle donc tous donc =An)*

Cor : les seuls groupes distingués de Sn sont An *(H un sg distingué de Sn. H inter An est distingué dans An donc c'est {Id} ou An. Si c'est An, c'est fini, H=An. Si c'est {Id}, alors H ne contient que Id et des permutations impaires. En fait c'est juste {Id,s} où s impaire, sinon pb avec signature. H normal donc pour tout z, zsz^-1=s donc s est dans le centre, c'est donc Id)*

Cor : D(Sn)=An. D(An)=An *(le groupe dérivé est inclus dans An par signature, et il est distingué dans Sn donc c'est An)*

Prop : un sous groupe d'ordre n de Sn est isomorphe à Sn-1 [Per 30] *(utilise la simplicité de An et l'action de Sn sur Sn/H par translation)*

2) Automorphismes de Sn

Automorphismes intérieurs, extérieurs... [Del 87] *(on montre qu'un automorphisme qui transforme une transpo en une transpo est un automorphisme intérieur. Pour ça, on calcule les images Phi(1,2), Phi(1,3), Phi(1,4) etc… On arrive à mq que Phi(1,i)=(a1,ai). Or si on pose a=(a_1,…,a_n) on a a(1,i)a^-1=(a1,ai) donc Phi coïncide avec un automph intérieur sur les transpos (1,i) donc sur Sn entier. On montre ensuite que si n=5 ou n>6, un automph DOIT conserver les transpos. C'est du dénombrement)*

III) Actions et groupe symétrique

Quand G agit sur un ensemble de cardinal n, on récupère un morphisme de G dans Sn. Si l'action est fidèle, G s'identifie comme un sg de Sn.
Théorème de Cayley

1) Polyèdres

Prop : Iso(T)=S4, Iso+(T)=A4 ; Iso(C)=S4xZ/2Z ; Iso+(C)=S4 [Aless]

2) Résolution d'équations

Déf : groupe de Galois d'un polynôme sur K [Goz 138] *(c'est le groupe formé des K-automph de L, où L est le corps de décomposition de P)*

Prop : Gal(P) agit fidèlement sur l'ensemble des racines de P [Goz 138] *(un K automorphisme qui fixe toutes les racines fixe L tout entier)*

Csq : le groupe de Galois d'un polynôme de degré n s'identifie à un sous groupe de Sn [Goz 138]

Déf : extension radicale [Goz 174] *(L extension radicale de K s'il existe une suite finie de corps K_i tq K C K_1…C L, ou K_i=Ki-1(alpha_i) avec alpha_i^n_i inclus dans K_i)*

Def : résoluble par radicaux [Goz 175] *(si le corps de décomposition de P est inclus dans une extension radicale de K)*

Déf : groupe résoluble

Th : K un corps de caractéristique 0. L'équation P(x)=0 est résoluble par radicaux ssi le groupe de Galois de P est résoluble [Gozard 176] *(gros théorème)*

Ex : le groupe de Galois de X^5-4X+2 est isomorphe à S5, donc non résoluble [Gozard 178] *(en effet, il a exactement 2 racines non réelles, la conjugaison correspond donc à une transposition, et comme on est dans S5, par Sylow, il existe un élément d'ordre 5 (ie un 5 cycle), donc le groupe de Galois est S5 tout entier. En effet, un lemme dit que si H un sg de Sp contient une transpo et un p-cycle alors H=Sp [Goz 177]).*

3) Isomorphisme exceptionnels

Prop : liste cardinaux [Per 105]

Th : Isomorphismes exceptionnels [Per 106]

Développements :
1 - Iso+(T) et Iso+(C) [Aless 62] (**)
2 - An simple [Per 26] (**)
3 - Isomorphismes exceptionnels [Perr 105] (**)

Bibliographie :
Gozard
Perrin
Delcourt
Alessandri

Pas mis :
Th de Frobenius Zolotarev

Rapport jury 2005-2009 :
*Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique. Certains candidats proposent donc en développement que Int(Sn) = Aut(Sn), n différent de 6. Il serait alors utile de savoir qu'en général G/Z(G) = Int(G) distingué dans Aut(G) et que Out(S6) = **Z**/2**Z**. Les applications ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers. Les décompositions en cycles, la signature doivent être connues.*
Les différentes formules pour la signature doivent être connues ; proposer comme développement que la signature est un morphisme n'est pas un développement substantiel au niveau de l'agrégation. Les candidats doivent faire le lien entre un sous-groupe d'ordre deux de Sn et le groupe An. Le lien entre le déterminant et la signature doit figurer dans cette leçon. Les éléments d'ordre 2 doivent être connus.